ĐỀ THAM KHẢO **PHÁT TRIỂN MINH HỌA BGD 2024** *(Đề gồm có 06 trang)*	**KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT QUỐC GIA NĂM 2024** **Bài thi môn: TOÁN** *Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề*

Họ và tên thí sinh:...

Số báo danh:...

ĐỀ VIP 1

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 0. **B.** 5. **C.** 4. **D.** -1.

Câu 2: Cho $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = -1$; $\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = 3$. Tích phân $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $2\cdot$ **B.** $-3\cdot$ **C.** -4. **D.** $4\cdot$

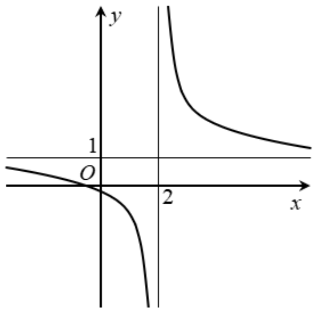
Câu 3: Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log(3a) = 3\log a$ **B.** $\log a^3 = \frac{1}{3}\log a$. **C.** $\log a^3 = 3\log a$. **D.** $\log(3a) = \frac{1}{3}\log a$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, véc tơ nào dưới đây có giá song song hoặc trùng với trục Oz?

A. $\overrightarrow{u_1} = (0;0;-1)$. **B.** $\overrightarrow{u_2} = (1;0;0)$. **C.** $\overrightarrow{u_3} = (0;1;0)$. **D.** $\overrightarrow{u_4} = (1;-1;0)$.

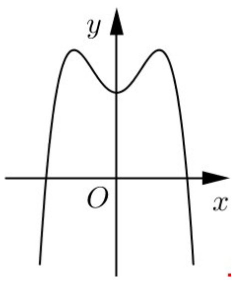
Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có phương trình



A. $y=-1$. **B.** $y=1$.

C. $y=-2$. **D.** $y=2$.

Câu 6: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=-x^4+2x^2+2$. **B.** $y=x^4-2x^2+2$. **C.** $y=x^3-3x^2+2$. **D.** $y=-x^3+3x^2+2$.

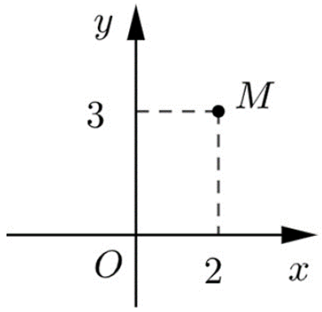
Câu 7: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+6}$ là

A. $(0;6)$. **B.** $(-\infty;6)$. **C.** $(0;64)$. **D.** $(6;+\infty)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(\alpha): x+2y-z+1=0$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(-1;0;0)$ **B.** $N(0;-2;0)$. **C.** $P(1;-2;1)$. **D.** $Q(1;2;-1)$.

Câu 9: Trong mặt phẳng tọa độ, cho điểm M là điểm biểu diễn số phức z như hình vẽ sau:



Phần thực của số phức z bằng

A. -3. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 3.

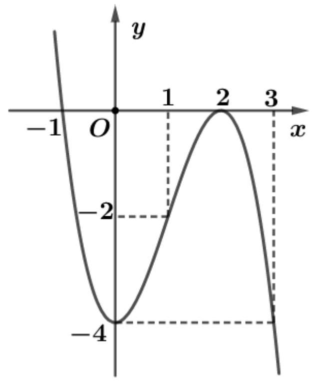
Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-2)^2=9$ có diện tích bằng

A. 36π. **B.** 9π. **C.** 12π. **D.** 18π.

Câu 11: Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $ab^2=9$. Giá trị của biểu thức $\log_3 a+2\log_3 b$ bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 13: Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Độ dài đường sinh của hình nón là

A. $2\sqrt{2}a$. **B.** $3a$. **C.** $2a$. **D.** $1,5a$.

Câu 14: Các số thực a,b tùy ý thỏa mãn $(3^a)^b=10$. Giá trị của ab bằng

A. $\log_3 10$. **B.** $\log_{10} 3$. **C.** 10^3. **D.** 3^{10}.

Câu 15: Hàm số nào trong các hàm số sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\log_5 x$. **B.** $y=5^x$. **C.** $y=(0,5)^x$. **D.** $y=\log_{0,5} x$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;3), B(-3;2;-1)$. Tọa độ trung điểm của AB là:

A. $(-4;2;2)$. **B.** $(-2;2;-4)$. **C.** $(-1;1;-2)$. **D.** $(-2;1;1)$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(2x+1)(x+2)^2(3x-1)^4, \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 18: Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\cos x-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ là

A. $\sin x+\cot x+C$. **B.** $-\sin x+\cot x+C$. **C.** $\sin x-\cot x+C$. **D.** $-\sin x-\cot x+C$.

Câu 19: Nếu $\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$ thì $\int\limits_1^3\left[f\left(x\right)+2x\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 20. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 12.

Câu 20: Khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $6a$, ΔSCD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy có thể tích bằng

A. $36\sqrt{2}a^3$. **B.** $108\sqrt{3}a^3$. **C.** $36\sqrt{3}a^3$. **D.** $36a^3$.

Câu 21: Các số thực x, y thoả mãn $\left(x-1\right)+2yi=y-2+\left(x+1\right)i$ là:

A. $x=1; y=0$. **B.** $x=-1; y=0$. **C.** $x=1; y=2$. **D.** $x=-2; y=1$.

Câu 22: Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$ và bán kính đáy $r=2a$. Độ dài đường sinh của hình nón bằng

A. $a\sqrt{13}$. **B.** $6a$. **C.** $3a$. **D.** $4a$.

Câu 23: Có bao nhiêu cách chọn một học sinh nam và một học sinh nữ từ một nhóm gồm 7 học sinh nam và 8 học sinh nữ

A. 15. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 56.

Câu 24: Biết $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=e^{2x}$ và $F\left(0\right)=0$. Giá trị của $F\left(\ln 3\right)$ bằng

A. 2 **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 25: Hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	||	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình $f\left(x\right)+m=0$ có bốn nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

A. $m<1$. **B.** $m>1$. **C.** $m>-1$. **D.** $m<-1$.

Câu 26: Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng 50π và độ dài đường sinh bằng đường kính của đường tròn đáy. Bán kính r của hình trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{5\sqrt{2\pi}}{2}$. **B.** 5. **C.** $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. **D.** $5\sqrt{\pi}$.

Câu 27: Cấp số cộng $\left(u_n\right)$ hữu hạn có số hạng đầu $u_1=-5$, công sai $d=5$ và số hạng cuối là 100. Cấp số cộng đã cho có bao nhiêu số hạng

A. 20. **B.** 22. **C.** 23. **D.** 21.

Câu 28: Gọi z_1, z_1 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+6z+13=0$ với z_1 có phần ảo âm. Giá trị của $3z_1+z_2$ bằng

A. $-12+4i$. **B.** $4-12i$. **C.** $4+12i$. **D.** $-12-4i$.

Câu 29: Cho số phức z thỏa mãn $2z-i.\overline{z}=3i$. Mô đun của z bằng:

A. $\sqrt{5}$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 3.

Câu 30: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng CD' và AC'

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 30°.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết $AD=2a, SA=a$.Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng:

A. $\frac{3a}{\sqrt{7}}$. **B.** $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Câu 32: Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x^2-1)$. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(1;2)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 33: Từ một hộp chứa 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng; lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi. Xác suất để lấy được 2 viên bi khác màu bằng

A. $\frac{5}{18}$. **B.** $\frac{7}{18}$. **C.** $\frac{5}{36}$. **D.** $\frac{13}{18}$.

Câu 34: Nếu $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=5$ thì $\int_0^2\left[2f(t)+1\right]\mathrm{d}t$ bằng

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 12.

Câu 35: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^4+2x^2+2024$ trên $[0;3]$ là

A. 1958. **B.** 2024. **C.** 2025. **D.** 2023.

Câu 36: Với $a>0$, biểu thức $\log_3\left(a\sqrt{3}\right)$ bằng

A. $\log_3 a-\frac{1}{2}$. **B.** $\sqrt{3}\log_3 a$. **C.** $\frac{1}{2}+\log_3 a$. **D.** $\frac{1}{2}\log_3 a$.

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-2)^2=9$ cắt mặt phẳng (Oxy) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(-1;1;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x-4y-z-2=0$?

A. $\begin{cases} x=1-t \\ y=-4+t \\ z=-1 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-4t \\ z=-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1-4t \\ z=-t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-1-t \\ y=1-4t \\ z=t \end{cases}$.

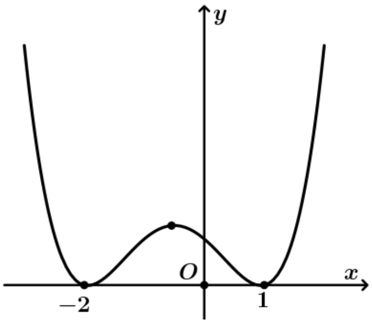
Câu 39: Biết x và y là hai số thực thoả mãn $\log_4 x=\log_9 y=\log_6(x-2y)$. Giá trị của $\frac{x}{y}$ bằng

A. $\log^2_{\frac{2}{3}} 2$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 40: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{x+m^2-6}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$. Tổng các phần tử của S là:

A. -2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm bậc bốn có đồ thị như hình bên. Khi diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng $\frac{214}{5}$ thì $\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ bằng:



A. $\dfrac{81}{20}$. **B.** $\dfrac{81}{10}$. **C.** $\dfrac{17334}{635}$. **D.** $\dfrac{17334}{1270}$.

Câu 42: Cho số phức z thỏa mãn $|z+6-13i|+|z-3-7i|=3\sqrt{13}$ và $(12-5i)(z-2+i)^2$ là số thực âm. Giá trị của $|z|$ bằng

A. 145. **B.** $\sqrt{145}$. **C.** 3. **D.** 9.

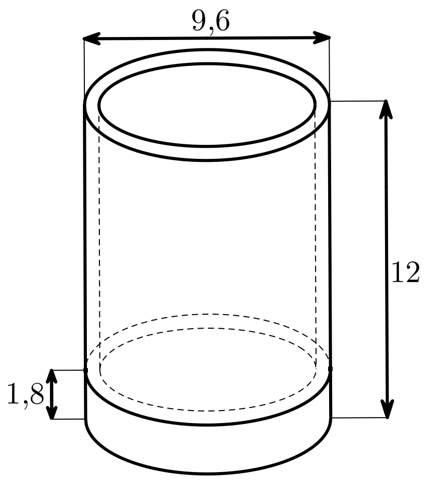
Câu 43: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC=2a$ và $\widehat{ABC}=60^\circ$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $\widehat{B'BC}$ là góc nhọn, mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC), góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) bằng 45°. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{3a^3}{\sqrt{7}}$. **B.** $\dfrac{6a^3}{\sqrt{7}}$. **C.** $\dfrac{a^3}{\sqrt{7}}$. **D.** $\dfrac{a^3}{3\sqrt{7}}$.

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=36$ cắt trục Oz tại 2 điểm A, B. Tọa độ trung điểm của đoạn AB là:

A. $(0;0;-1)$ **B.** $(0;0;1)$ **C.** $(1;1;0)$ **D.** $(-1;-1;0)$

Câu 45: Cần bao nhiêu thuỷ tinh để làm một chiếc cốc hình trụ có chiều cao bằng 12 cm, đường kính đáy bằng $9,6\,\text{cm}$ (tính từ mép ngoài cốc), đáy cốc dày $1,8\,\text{cm}$, thành xung quanh cốc dày $0,24\,\text{cm}$ (tính gần đúng đến hai chữ số thập phân)?



A. $64,39\ \text{cm}^3$. **B.** $202,27\ \text{cm}^3$. **C.** $212,31\ \text{cm}^3$. **D.** $666,97\ \text{cm}^3$.

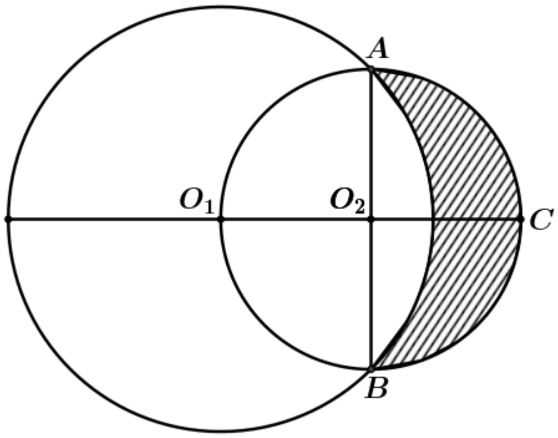
Câu 46: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{2}}\dfrac{x^2+y^2+1}{x+y}=x(2-x)+y(2-y)+1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{2x+3y}{x+y+1}$.

A. 8. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 47: Xét các số phức z và w thỏa mãn $|z|=|w|=1$, $|z+w|=\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|zw+2i(z+w)-4|$ bằng thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(5;6)$.

Câu 48: Cho hai đường tròn $(O_1;10)$ và $(O_2;6)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn $(O_2;6)$. Gọi (D) là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường tròn. Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



A. $V=36\pi$ **B.** $V=\frac{68\pi}{3}$ **C.** $V=\frac{320}{3}$ **D.** $V=\frac{320\pi}{3}$

Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^2-82x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f(x^4-18x^2+m)$ có đúng 7 cực trị?

A. 83. **B.** 84. **C.** 80. **D.** 81.

Câu 50: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+2z+16=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=21$. Một khối hộp chữ nhật (H) có bốn đỉnh nằm trên mặt phẳng (P) và bốn đỉnh còn lại nằm trên mặt cầu (S). Khi (H) có thể tích lớn nhất, thì mặt phẳng chứa bốn đỉnh của (H) nằm trên mặt cầu (S) là $(Q):2x+by+cz+d=0$. Giá trị $b+c+d$ bằng:

A. -15. **B.** -13. **C.** -14. **D.** -7.

--------------------**HẾT**--------------------

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	**2.A**	**3.C**	**4.A**	**5.B**	**6.A**	**7.B**	**8.A**	**9.C**	**10.A**
11.C	**12.D**	**13.B**	**14.A**	**15.C**	**16.D**	**17.D**	**18.A**	**19.B**	**20.C**
21.B	**22.C**	**23.D**	**24.D**	**25.C**	**26.C**	**27.B**	**28.D**	**29.A**	**30.C**
31.D	**32.C**	**33.D**	**34.D**	**35.C**	**36.C**	**37.C**	**38.C**	**39.C**	**40.A**
41.A	**42.D**	**43.C**	**44.A**	**45.B**	**46.D**	**47.A**	**48.D**	**49.C**	**50.B**

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 0.　　**B.** 5.　　**C.** 4.　　**D.** -1.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị cực đại của hàm số bằng 5.

Câu 2: Cho $\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-1$; $\int\limits_2^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$. Tích phân $\int\limits_1^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $2\cdot$　　**B.** $-3\cdot$　　**C.** -4.　　**D.** $4\cdot$

Lời giải

Ta có: $\int\limits_1^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_2^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-1+3=2$

Câu 3: Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log\left(3a\right)=3\log a$　　**B.** $\log a^3=\frac{1}{3}\log a$.　　**C.** $\log a^3=3\log a$.　　**D.** $\log\left(3a\right)=\frac{1}{3}\log a$.

Lời giải

Ta có: $\log a^3=3\log a$

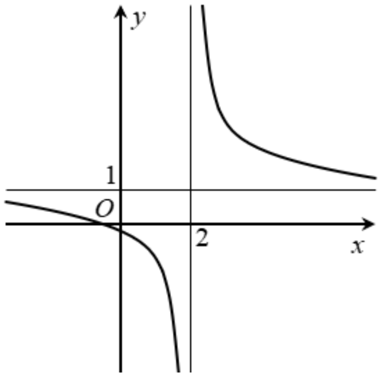
Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, véc tơ nào dưới đây có giá song song hoặc trùng với trục Oz?

A. $\overrightarrow{u_1}=\left(0;0;-1\right)$.　　**B.** $\overrightarrow{u_2}=\left(1;0;0\right)$.　　**C.** $\overrightarrow{u_3}=\left(0;1;0\right)$.　　**D.** $\overrightarrow{u_4}=\left(1;-1;0\right)$.

Lời giải

Véctơ có giá song song hoặc trùng với Oz nên véc tơ đó cùng phương với véc tơ $\vec{k}=\left(0;0;1\right)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có phương trình

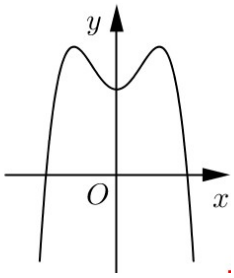


A. $y=-1$. **B.** $y=1$. **C.** $y=-2$. **D.** $y=2$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=1$.

Câu 6: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=-x^4+2x^2+2$. **B.** $y=x^4-2x^2+2$. **C.** $y=x^3-3x^2+2$. **D.** $y=-x^3+3x^2+2$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị đã cho, ta thấy đồ thị này là đồ thị hàm số bậc 4 có hệ số $a<0$.

Câu 7: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x}<2^{x+6}$ là

A. $(0;6)$. **B.** $(-\infty;6)$. **C.** $(0;64)$. **D.** $(6;+\infty)$.

Lời giải

Ta có: $2^{2x}<2^{x+6}\Leftrightarrow 2x<x+6\Leftrightarrow x<6$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(\alpha):x+2y-z+1=0$ đi qua điểm nào dưới đây?

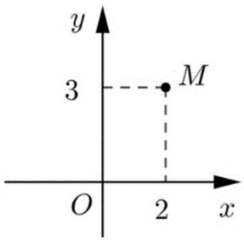
A. $M(-1;0;0)$ **B.** $N(0;-2;0)$. **C.** $P(1;-2;1)$. **D.** $Q(1;2;-1)$.

Lời giải

Thay $M(-1;0;0)$ vào $(\alpha):x+2y-z+1=0$, ta được: $-1+1=0$

Vậy ta có : $M(-1;0;0)\in(\alpha):x+2y-z+1=0$

Câu 9: Trong mặt phẳng tọa độ, cho điểm M là điểm biểu diễn số phức z như hình vẽ sau:



Phần thực của số phức z bằng

A. -3. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Phần thực của số phức z bằng 2.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-2)^2=9$ có diện tích bằng

A. 36π. **B.** 9π. **C.** 12π. **D.** 18π.

Lời giải

Mặt cầu (S) có bán kính $R=3$. Vậy diện tích mặt cầu (S) là $4\pi R^2=4\pi.9=36\pi$.

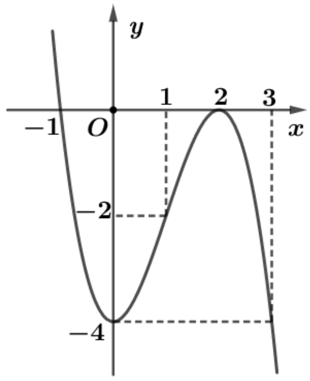
Câu 11: Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $ab^2=9$. Giá trị của biểu thức $\log_3 a+2\log_3 b$ bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $ab^2=9\Rightarrow \log_3\left(ab^2\right)=\log_3 9\Rightarrow \log_3 a+2\log_2 b=2$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta thấy hàm số $y=f(x)$ đồng biến khoảng $(0;2)$.

Câu 13: Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Độ dài đường sinh của hình nón là

A. $2\sqrt{2}a$. **B.** $3a$. **C.** $2a$. **D.** $1,5a$.

Lời giải

Diện tích xung quanh của hình nón bằng πRl trong đó l là độ dài đường sinh và $R=a$ là bán kính đáy.

Do đó $3\pi a^2=\pi al\Rightarrow l=3a$.

Câu 14: Các số thực a,b tùy ý thỏa mãn $\left(3^a\right)^b=10$. Giá trị của ab bằng

A. $\log_3 10$. **B.** $\log_{10} 3$. **C.** 10^3. **D.** 3^{10}.

Lời giải

Ta có: $\left(3^a\right)^b=10\Leftrightarrow 3^{ab}=10\Leftrightarrow ab=\log_3 10$.

Câu 15: Hàm số nào trong các hàm số sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\log_5 x$. **B.** $y=5^x$. **C.** $y=(0,5)^x$. **D.** $y=\log_{0,5} x$.

Lời giải

Hàm số $y=(0,5)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ vì $0<0,5<1$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;3), B(-3;2;-1)$. Tọa độ trung điểm của AB là:

A. $(-4;2;2)$. **B.** $(-2;2;-4)$. **C.** $(-1;1;-2)$. **D.** $(-2;1;1)$.

Lời giải

Ta có tọa độ trung điểm của AB là $(-2;1;1)$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(2x+1)(x+2)^2(3x-1)^4, \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $f'(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ x=-2 \\ x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Mặt khác: $x=-\dfrac{1}{2}$ là nghiệm bội lẻ, $x=-2, x=\dfrac{1}{3}$ là nghiệm bội chẵn nên số điểm cực trị là 1.

Câu 18: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ là

A. $\sin x+\cot x+C$. **B.** $-\sin x+\cot x+C$. **C.** $\sin x-\cot x+C$. **D.** $-\sin x-\cot x+C$.

Lời giải

Ta có $F(x)=\int f(x)d=\int\left(\cos x-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)dx=\sin x+\cot x+C$

Câu 19: Nếu $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=2$ thì $\int\limits_1^3\left[f(x)+2x\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 20. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 12.

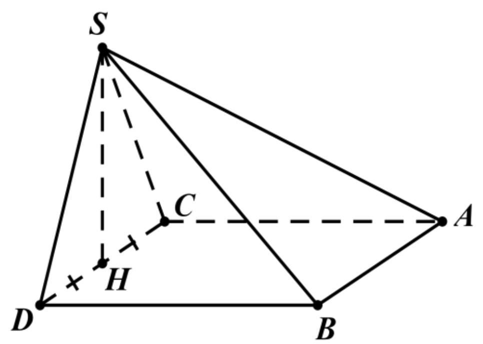
Lời giải

Ta có $\int\limits_1^3\left[f(x)+2x\right]\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_1^3 2x\mathrm{d}x=2+x^2\Big|_1^3=2+9-1=10$.

Câu 20: Khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $6a$, ΔSCD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy có thể tích bằng

A. $36\sqrt{2}a^3$. **B.** $108\sqrt{3}a^3$. **C.** $36\sqrt{3}a^3$. **D.** $36a^3$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của CD.

Theo giả thiết ta có $SH\perp(ABCD)$.

Vì ΔSCD đều có cạnh bằng $6a$ nên $SH=\dfrac{6a\sqrt{3}}{2}=3a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.3a\sqrt{3}.36a^2=36\sqrt{3}a^3$

Câu 21: Các số thực x, y thoả mãn $(x-1)+2yi=y-2+(x+1)i$ là:

A. $x=1; y=0$. **B.** $x=-1; y=0$. **C.** $x=1; y=2$. **D.** $x=-2; y=1$.

Lời giải

Ta có: $(x-1)+2yi=y-2+(x+1)i \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=y-2 \\ 2y=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ x-2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$.

Câu 22: Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$ và bán kính đáy $r=2a$. Độ dài đường sinh của hình nón bằng

A. $a\sqrt{13}$. **B.** $6a$. **C.** $3a$. **D.** $4a$.

Lời giải

Ta có $S_{xq}=\pi rl \Rightarrow l=\dfrac{S_{xq}}{\pi r}=\dfrac{6\pi a^2}{\pi.2a}=3a$. Vậy hình nón có đường sinh $l=3a$.

Câu 23: Có bao nhiêu cách chọn một học sinh nam và một học sinh nữ từ một nhóm gồm 7 học sinh nam và 8 học sinh nữ

A. 15. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 56.

Lời giải

Số cách chọn một học sinh nam từ nhóm 7 học sinh nam C_7^1 cách.

Số cách chọn một học sinh nữ từ nhóm 8 học sinh nữ C_8^1 cách.

$\Rightarrow C_7^1.C_8^1=56$ cách chọn một học sinh nam và một học sinh nữ từ một nhóm gồm 7 học sinh nam và 8 học sinh nữ.

Câu 24: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{2x}$ và $F(0)=0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng

A. 2 **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $F(x)=\int e^{2x}dx=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$.

Theo giả thiết $F(0)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}e^0+C=0 \Leftrightarrow C=-\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}-\dfrac{1}{2} \Rightarrow F(\ln 3)=\dfrac{1}{2}e^{2\ln 3}-\dfrac{1}{2}=4$

Câu 25: Hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

Phương trình $f(x)+m=0$ có bốn nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

A. $m<1$. **B.** $m>1$. **C.** $m>-1$. **D.** $m<-1$.

Lời giải

Số nghiệm của phương trình $f(x)+m=0$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-m$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $-m<1 \Leftrightarrow m>-1$ thì phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Câu 26: Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng 50π và độ dài đường sinh bằng đường kính của đường tròn đáy. Bán kính r của hình trụ đã cho bằng

A. $\frac{5\sqrt{2\pi}}{2}$. **B.** 5. **<u>C</u>.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **D.** $5\sqrt{\pi}$.

Lời giải

Hình trụ có đường sinh $l = 2r$

Diện tích xung quanh bằng 50π nên $2\pi rl = 50\pi \Leftrightarrow r.2r = 25 \Rightarrow r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Câu 27: Cấp số cộng (u_n) hữu hạn có số hạng đầu $u_1 = -5$, công sai $d = 5$ và số hạng cuối là 100. Cấp số cộng đã cho có bao nhiêu số hạng

A. 20. **<u>B</u>.** 22. **C.** 23. **D.** 21.

Lời giải

Ta có: Số hạng cuối là $u_n = u_1 + (n-1)d = -5 + 5(n-1) = -10 + 5n = 100 \Leftrightarrow n = 22$

Câu 28: Gọi z_1, z_1 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 6z + 13 = 0$ với z_1 có phần ảo âm. Giá trị của $3z_1 + z_2$ bằng

A. $-12 + 4i$. **B.** $4 - 12i$. **C.** $4 + 12i$. **<u>D</u>.** $-12 - 4i$.

Lời giải

Ta có: $z^2 + 6z + 13 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -3 - 2i \\ z = -3 + 2i \end{array}\right. \Rightarrow z_1 = -3 - 2i; z_2 = -3 + 2i$.

Suy ra $3z_1 + z_2 = 3(-3 - 2i) - 3 + 2i = -12 - 4i$.

Câu 29: Cho số phức z thỏa mãn $2z - i.\overline{z} = 3i$. Mô đun của z bằng:

<u>A</u>. $\sqrt{5}$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 3.

Lời giải

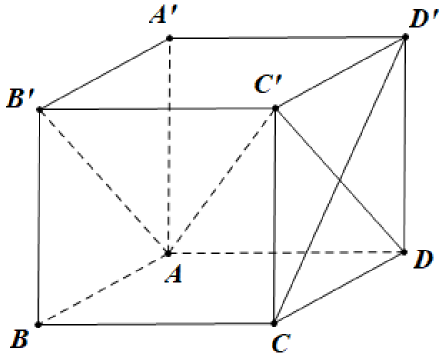
Đặt $z = a + bi$.

$2z - i\overline{z} = 3i \Leftrightarrow 2(a + bi) - i(a - bi) = 3i \Leftrightarrow 2a - b + i(2b - a) = 3i \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 0 \\ 2b - a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

Suy ra: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$.

Câu 30: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng CD' và AC'

A. $45°$. **B.** $60°$. **<u>C</u>.** $90°$. **D.** $30°$.



Ta có $CD' \perp C'D$ (tính chất đường chéo hình vuông), $CD' \perp C'B'$ (tính chất hình lập phương).

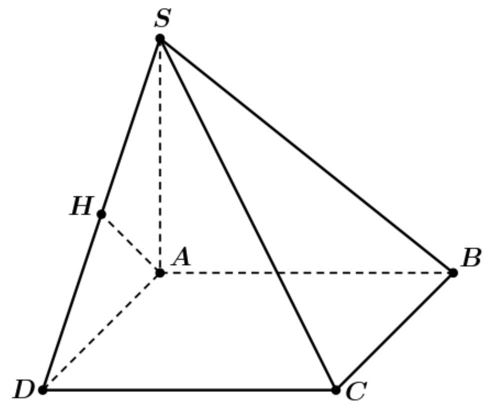
Suy ra $CD' \perp (AB'C'D) \Rightarrow CD' \perp AC'$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng CD' và AC' bằng $90°$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết $AD = 2a, SA = a$. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng:

A. $\frac{3a}{\sqrt{7}}$.　　B. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.　　C. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.　　**D.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A lên cạnh SD. Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$

Suy ra: $\begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD)$. Khoảng cách từ A đến đến (SCD) bằng AH.

Ta có: $AH = \frac{AS.AD}{\sqrt{AS^2 + AD^2}} = \frac{a.2a}{\sqrt{a^2 + (2a)^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Câu 32: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x^2-1)$. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(1;2)$.　　B. $(-2;-1)$.　　**C.** $(-1;0)$.　　D. $(0;1)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array} \right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$

Câu 33: Từ một hộp chứa 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng; lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi. Xác suất để lấy được 2 viên bi khác màu bằng

A. $\frac{5}{18}$.　　B. $\frac{7}{18}$.　　C. $\frac{5}{36}$.　　**D.** $\frac{13}{18}$.

Lời giải

Lấy 2 viên bi từ 9 viên bi có C_9^2 cách nên $n(\Omega) = C_9^2$.

Gọi A là biến cố " Lấy được hai viên bi khác màu ". Suy ra $\overline{A}$ là biến cố " Lấy được hai viên bi cùng màu ".

Các kết quả thuận lợi của biến cố $\overline{A}$ là: $n(\overline{A}) = C_4^2 + C_3^2 + C_2^2 = 10$.

Vậy xác suất lấy được 2 viên bi khác màu là: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \frac{13}{18}$.

Câu 34: Nếu $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 5$ thì $\int\limits_0^2 [2f(t)+1]\mathrm{dt}$ bằng

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

Ta có: $\int\limits_0^2 [2f(t)+1]dt = 2\int\limits_0^2 f(t)dt + \int\limits_0^2 dt = 2.5+2 = 12.$

Câu 35: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 2024$ trên $[0;3]$ là

A. 1958. **B.** 2024. **C.** 2025. **D.** 2023.

Lời giải

Ta có: $y' = -4x^3 + 4x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin (0;3) \\ x = 1 \in (0;3) \\ x = -1 \notin (0;3) \end{array}\right.$

Và: $y(0) = 2024;\ y(1) = 2025;\ y(3) = 1961$.

Vậy: $\max\limits_{[0;3]} y = y(1) = 2025$

Câu 36: Với $a > 0$, biểu thức $\log_3\left(a\sqrt{3}\right)$ bằng

A. $\log_3 a - \frac{1}{2}$. **B.** $\sqrt{3}\log_3 a$. **C.** $\frac{1}{2} + \log_3 a$. **D.** $\frac{1}{2}\log_3 a$.

Lời giải

Với $a > 0$, ta có $\log_3\left(a\sqrt{3}\right) = \log_3 a + \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \log_3 a + \frac{1}{2}$.

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$ cắt mặt phẳng (Oxy) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Lời giải

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;2)$ và bán kính $R = 3$

Mặt phẳng $(Oxy): z = 0$

Do đó bán kính đường tròn giao tuyến là $r = \sqrt{R^2 - d^2(I;(Oxy))} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(-1;1;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x - 4y - z - 2 = 0$?

A. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -4 + t \\ z = -1 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = -t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = -t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 - 4t \\ z = t \end{cases}$.

Lời giải

Do đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $(Q): x - 4y - z - 2 = 0$ nên đường thẳng Δ nhận $\vec{u} = (1;-4;-1)$ làm một vectơ chỉ phương.

Khi đó phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1-4t \\ z=-t \end{cases}$.

Câu 39: Biết x và y là hai số thực thoả mãn $\log_4 x=\log_9 y=\log_6(x-2y)$. Giá trị của $\dfrac{x}{y}$ bằng

A. $\log^2_{\frac{2}{3}} 2$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $\log_4 x=\log_9 y=\log_6(x-2y)=t \Rightarrow \begin{cases} x=4^t \\ y=9^t \\ x-2y=6^t \end{cases} \Rightarrow 4^t-2.9^t=6^t \Rightarrow \left(\dfrac{4}{9}\right)^t-\left(\dfrac{2}{3}\right)^t-2=0$

Đặt $u=\left(\dfrac{2}{3}\right)^t$, điều kiện $u>0$. Ta có phương trình: $u^2-u-2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=-1 \text{ (lo¹i)} \\ u=2 \end{array}\right.$.

Ta có: $\dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{4}{9}\right)^t=\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^t\right]^2=4$.

Câu 40: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m^2-6}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$. Tổng các phần tử của S là:

A. -2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{-m-m^2+6}{(x-m)^2}=\dfrac{-m^2-m+6}{(x-m)^2}$.

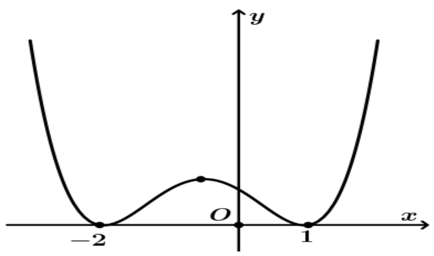
Để hàm số $y=\dfrac{x+m^2-6}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ thì

$f'(x)>0, \forall x\in(-\infty;-2) \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2-m+6>0 \\ m\notin(-\infty;-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<m<2 \\ m\geq -2 \end{cases} \Rightarrow -2\leq m<2 \Rightarrow S=\{-2;-1;0;1\}$

.

Vậy tổng các phần tử của S là $-2+(-1)+0+1=-2$.

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm bậc bốn có đồ thị như hình bên. Khi diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng $\dfrac{214}{5}$ thì $\int\limits_{-2}^{1} f(x)\,dx$ bằng:



A. $\dfrac{81}{20}$. **B.** $\dfrac{81}{10}$. **C.** $\dfrac{17334}{635}$. **D.** $\dfrac{17334}{1270}$.

Lời giải

Từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ suy ra $f(x)=a(x+2)^2(x-1)^2, (a>0)$.

Ta có $f'(x)=2a(x+2)(x-1)^2+2a(x+2)^2(x-1)=2a(x+2)(x-1)(2x+1)$.

Xét phương trình $f(x)=f'(x) \Leftrightarrow a(x+2)(x-1)\left[(x+2)(x-1)-2(2x+1)\right]=0$

$$\Leftrightarrow a(x+2)(x-1)\left(x^2-3x-4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \\ x=-1 \\ x=4 \end{array}\right..$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ là

$$S=\int_{-2}^{4}\left|a(x+2)(x-1)\left(x^2-3x-4\right)\right|dx=a\int_{-2}^{4}\left|(x+2)(x-1)\left(x^2-3x-4\right)\right|dx=\frac{428}{5}a.$$

Theo đề bài ta có $\frac{428}{5}a=\frac{214}{5} \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}(TM) \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}(x+2)^2(x-1)^2$.

Khi đó: $\int_{-2}^{1}\frac{1}{2}(x+2)^2(x-1)^2\,dx=\frac{81}{20}$.

Câu 42: Cho số phức z thỏa mãn $|z+6-13i|+|z-3-7i|=3\sqrt{13}$ và $(12-5i)(z-2+i)^2$ là số thực âm. Giá trị của $|z|$ bằng

A. 145. **B.** $\sqrt{145}$. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải

Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$, $A(-6;13), B(3;7)$ và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Ta có: $|z+6-13i|+|z-3-7i|=3\sqrt{13} \Leftrightarrow MA+MB=3\sqrt{13}$ mà $AB=3\sqrt{13} \Rightarrow M$ nằm trong đoạn AB.

Ta có phương trình đường thẳng AB là $\begin{cases} x=3+3t \\ y=7-2t \end{cases} \Rightarrow M(3+3t;7-2t)$

Vì M nằm trong đoạn AB nên $-6\le x_M\le 3 \Rightarrow t\in[-3;0]$

Ta lại có: $(12-5i)(z-2+i)^2=(12-5i)\left[(3t+1)+(7-2t)i\right]^2$

$=(12-5i)\left[(x-2)^2-(y+1)^2+2i(x-2)(y+1)\right]$

$=12.\left[(x-2)^2-(y+1)^2\right]+10.(x-2)(y+1)+i\left[-5(x-2)^2+5(y+1)^2+24.(x-2)(y+1)\right]$

Vì $(12-5i)(z-2+i)^2$ là số thực âm nên $\begin{cases} 12.\left[(x-2)^2-(y+1)^2\right]+10.(x-2)(y+1)<0 \quad (**) \\ -5(x-2)^2+5(y+1)^2+24.(x-2)(y+1)=0 \quad (*) \end{cases}$

$$(*) \Leftrightarrow 24(3t+1)(8-2t)-5(3t+1)^2+5(8-2t)^2=0 \Leftrightarrow -169t^2+338t+507=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3\ (loai) \\ t=-1(tm) \end{array}\right.$$

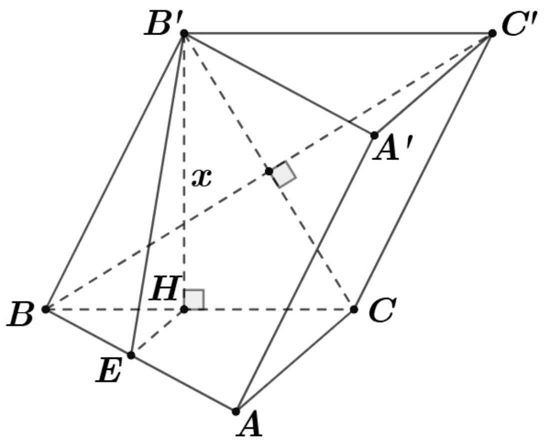
$\Rightarrow M(0;9)$ thỏa mãn $(**)$ suy ra $|z|=9$.

Câu 43: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC=2a$ và $ABC=60°$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $B'BC$ là góc nhọn, mặt phẳng $(BCC'B')$

vuông góc với (ABC), góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{3a^3}{\sqrt{7}}$. **B.** $\dfrac{6a^3}{\sqrt{7}}$. **<u>C</u>.** $\dfrac{a^3}{\sqrt{7}}$. **D.** $\dfrac{a^3}{3\sqrt{7}}$.

Lời giải



Ta có ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC = 2a$ và $ABC = 60° \Rightarrow \begin{cases} AC = a\sqrt{3} \\ AB = a \end{cases}$.

Ta có $(BCC'B') \perp (ABC)$, kẻ $B'H \perp BC$ với $BC = (ABC) \cap (BCC'B') \Rightarrow B'H \perp (ABC)$.

Trong (ABC), kẻ $HE \perp AB \Rightarrow AB \perp (HEB')$.

Ta có $\begin{cases} (HEB') \perp (ABC) \\ (HEB') \perp (ABB'A') \\ HE = (HEB') \cap (ABC) \\ EB' = (HEB') \perp (ABB'A') \end{cases} \Rightarrow ((ABC),(ABB'A')) = (HE, EB') = HEB' = 45°$.

Suy ra tam giác HEB' vuông cân tại H nên $HE = HB' = x$.

Do $HE // AC$ nên $\dfrac{BH}{BC} = \dfrac{EH}{AC} \Leftrightarrow BH = BC\dfrac{EH}{AC} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $BB'^2 = BH^2 + HB'^2 \Leftrightarrow 4a^2 = \dfrac{3x^2}{4} + x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{4a}{\sqrt{7}} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = HB'\dfrac{1}{2}AC.AB = \dfrac{a^3}{\sqrt{7}}$.

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 36$ cắt trục Oz tại 2 điểm A, B. Tọa độ trung điểm của đoạn AB là:

<u>A</u>. $(0;0;-1)$ **B.** $(0;0;1)$ **C.** $(1;1;0)$ **D.** $(-1;-1;0)$

Lời giải

Đường thẳng Oz đi qua điểm $M(0;0;1)$ và nhận vecto $\vec{k} = (0;0;1)$ là vecto chỉ phương nên có phương trình là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

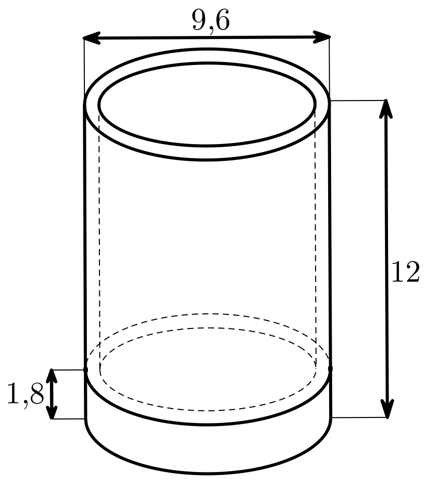
Tọa độ 2 điểm A, B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases} \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} t=-2+\sqrt{34} \\ t=-2-\sqrt{34} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=-1+\sqrt{34} \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=-1-\sqrt{34} \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow A\left(0;0;-1+\sqrt{34}\right); B\left(0;0;-1-\sqrt{34}\right)$

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(0;0;-1)$

Câu 45: Cần bao nhiêu thuỷ tinh để làm một chiếc cốc hình trụ có chiều cao bằng 12 cm, đường kính đáy bằng $9,6\text{cm}$ (tính từ mép ngoài cốc), đáy cốc dày $1,8\text{cm}$, thành xung quanh cốc dày $0,24\text{cm}$ (tính gần đúng đến hai chữ số thập phân)?



A. $64,39\ \text{cm}^3$. **B.** $202,27\ \text{cm}^3$. **C.** $212,31\ \text{cm}^3$. **D.** $666,97\ \text{cm}^3$.

Lời giải

Gọi $V_1; V_2$ lần lượt là thể tích của chiếc cốc thuỷ tinh và thể tích của khối lượng chất lỏng mà cốc có thể đựng.

Ta có: $V_1 = 12.\pi.4,8^2 = \dfrac{6912}{25}\pi\left(\text{cm}^3\right)$

$V_2 = (12-1,8).\pi.\left(\dfrac{9,6-2.0,24}{2}\right)^2 \approx 666,32\left(\text{cm}^3\right)$

Vậy khối lượng thuỷ tinh cần sử dụng là: $\dfrac{6912}{25}\pi - 666,32 \approx 202,27\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 46: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{2}} \dfrac{x^2+y^2+1}{x+y} = x(2-x)+y(2-y)+1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{2x+3y}{x+y+1}$.

A. 8. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow 2\log_2\dfrac{x^2+y^2+1}{2(x+y)}=2(x+y)-(x^2+y^2+1)$

Đặt $u=x^2+y^2+1,\ v=2(x+y)$ với $u,v>0$ thì $2\log_2\dfrac{u}{v}=v-u$

$\Leftrightarrow 2\log_2 u+u=2\log_2 v+v\ \ (*)$

Xét $f(t)=2\log_2 t+t$ với $t>0$. Dễ thấy $f'(t)=\dfrac{2}{t\ln 2}+1>0,\forall t>0$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên $(*)\Leftrightarrow u=v\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Gọi $M(x;y)\Rightarrow M\in(C)$: tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$.

Mặt khác $P=\dfrac{2x+3y}{x+y+1}\Rightarrow M\in\Delta:(P-2)x+(P-3)y+P=0$.

Để tồn tại điểm chung giữa Δ và (C) $\Leftrightarrow d(I;\Delta)\le R\Leftrightarrow \dfrac{|3P-5|}{\sqrt{(P-2)^2+(P-3)^2}}\le 1$

$\Leftrightarrow 7P^2-20P+12\le 0\Leftrightarrow \dfrac{6}{7}\le P\le 2$. Suy ra $\max P=2\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=1\\ -y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$.

Câu 47: Xét các số phức z và w thỏa mãn $|z|=|w|=1$, $|z+w|=\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|zw+2i(z+w)-4|$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(5;6)$.

Lời giải

Ta có $|z+w|=\sqrt{2}\ \Rightarrow 2=|z+w|^2=(z+w)(\bar{z}+\bar{w})=|z|^2+|w|^2+z\bar{w}+\bar{z}w$

$\Rightarrow z\bar{w}+\bar{z}w=0\ \Rightarrow z\bar{w}$ là số thuần ảo. Hay $z\bar{w}=ki$, $k\in\mathbb{R}$. Do đó, $z=\dfrac{ki}{\bar{w}}$.

Mặt khác, $|z+w|=\sqrt{2}\Rightarrow\left|\dfrac{ki}{\bar{w}}+w\right|=\sqrt{2}\ \Rightarrow|ki+w\bar{w}|=\sqrt{2}|\bar{w}|\ \Rightarrow|ki+1|=\sqrt{2}$ (do $|w|=|\bar{w}|=1$)

$\Rightarrow\sqrt{k^2+1}=\sqrt{2}\ \Rightarrow k=\pm 1$.

Vậy $z=\pm\dfrac{i}{\bar{w}}$. Do vai trò bình đẳng của z và w nên ta chỉ cần xét trường hợp $z=\dfrac{i}{\bar{w}}$.

Khi đó: $P=|iw^2+(2i-2)w-4|=|w^2+(2+2i)w+4i|=|(w+1+i)^2+2i|$.

Đặt $u=w+1+i\Rightarrow w=u-1-i\Rightarrow|w|=|u-1-i|=1$ và $z_0=-1-i$.

Ta có $P^2=|u^2+2i|^2=|u^2+z_0^2|^2=(u^2+z_0^2)(\bar{u}^2+\bar{z}_0^2)$

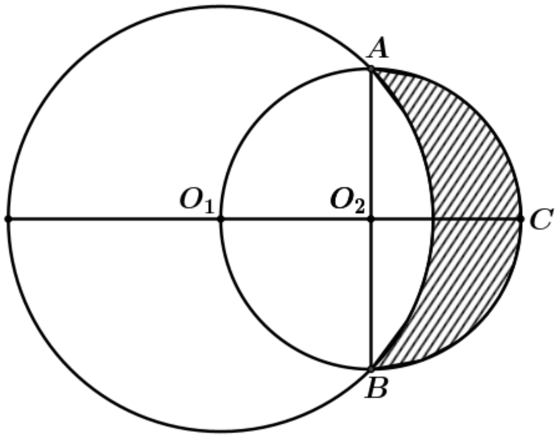
$=|u|^4+|z_0|^4+(u\cdot\bar{z}_0+z_0\cdot\bar{u})^2-2|u.z_0|^2=|u|^4-4|u|^2+4+(u.\bar{z}_0+z_0.\bar{u})^2$.

Mà $(u+z_0)(\bar{u}+\bar{z}_0)=|u+z_0|^2=1\ \Rightarrow u\cdot\bar{z}_0+z_0\cdot\bar{u}=1-|u|^2-|z_0|^2=-|u|^2-1$.

Suy ra: $P^2=|u|^4-4|u|^2+4+(|u|^2+1)^2=2|u|^4-2|u|^2+5=2\left(|u|^2-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}\ge\dfrac{9}{2}$

$\Rightarrow P\ge\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\approx 2{,}1\in(2;3)$.

Câu 48: Cho hai đường tròn $(O_1;10)$ và $(O_2;6)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn $(O_2;6)$. Gọi (D) là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường tròn. Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



A. $V = 36\pi$ **B.** $V = \dfrac{68\pi}{3}$ **C.** $V = \dfrac{320}{3}$ **D.** $V = \dfrac{320\pi}{3}$

Lời giải

Chọn hệ tọa độ Oxy với $O_2 \equiv O$, $O_2C \equiv Ox$, $O_2A \equiv Oy$.

Cạnh $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \Rightarrow (O_1): (x+8)^2 + y^2 = 100$.

Phương trình đường tròn (O_2): $x^2 + y^2 = 36$.

Kí hiệu (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{100 - (x+8)^2}$, trục Ox, $x = 0$, $x = 2$.

Kí hiệu (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{36 - x^2}$, trục Ox, $x = 0$, $x = 6$.

Khi đó thể tích V cần tính chính bằng thể tích V_2 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_2) xung quanh trục Ox trừ đi thể tích V_1 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_1) xung quanh trục Ox.

Ta có $V_2 = \dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{2}{3}\pi.6^3 = 144\pi$.

Lại có $V_1 = \pi\displaystyle\int_0^2 y^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^2 \left[100 - (x+8)^2\right]\mathrm{d}x = \dfrac{112\pi}{3}$.

Do đó $V = V_2 - V_1 = 144\pi - \dfrac{112\pi}{3} = \dfrac{320\pi}{3}$.

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2 - 82x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x^4 - 18x^2 + m)$ có đúng 7 cực trị?

A. 83. **B.** vô số **C.** 80. **D.** 81.

Lời giải

Ta có $y' = (4x^3 - 36x) f'(x^4 - 18x^2 + m)$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x^4 - 18x^2 + m) = 0 \\ 4x^3 - 36x = 0 \end{array}\right.$.

Với $4x^3-36x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 3 \end{array}\right.$ có 3 nghiệm đơn.

Với $f'\left(x^4-18x^2+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4-18x^2+m=0 \\ x^4-18x^2+m=82 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4-18x^2=-m \\ x^4-18x^2=-m+82 \end{array}\right.$.

Xét hàm số $g(x)=x^4-18x^2$ có $g'(x)=4x^3-36x$, $g'(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 3 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=x^4-18x^2$.

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-81	$\nearrow$	0	$\searrow$	-81	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số $y=f\left(x^4-18x^2+m\right)$ có đúng 7 cực trị thì $f'\left(x^4-18x^2+m\right)=0$ phải có 4 nghiệm đơn khác $0, \pm 3$. Do đó dựa vào bảng biến thiên ta có

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} -m<-81 \\ -81<-m+82<0 \end{array}\right. \\ -m+82>-m>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 82<m<163 \\ m<0 \end{array}\right..$$

Mà $m \in \mathbb{Z}^+$ nên $m \in \{83;84;...161;162\}$ nên có 80 giá trị.

Câu 50: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+16=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=21$. Một khối hộp chữ nhật (H) có bốn đỉnh nằm trên mặt phẳng (P) và bốn đỉnh còn lại nằm trên mặt cầu (S). Khi (H) có thể tích lớn nhất, thì mặt phẳng chứa bốn đỉnh của (H) nằm trên mặt cầu (S) là $(Q): 2x+by+cz+d=0$. Giá trị $b+c+d$ bằng

A. -15. **B.** -13. **C.** -14. **D.** -7.

Lời giải

Mặt cầu (S) tâm $I(2;-1;3)$, bán kính $R=\sqrt{21}$.

Ta có: $d(I;(P))=9>\sqrt{21}$ nên suy ra mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S).

Gọi a, b là các kích thước mặt đáy hình hộp chữ nhật và $d=d\left(I;(Q)\right)$.

Khi đó, thể tích của khối hộp chữ nhật (H) là

$$V=\left[d\left(I;(P)\right)+d\left(I;(Q)\right)\right]ab=(9+d)ab \le (9+d)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=(9+d)\left(21-d^2\right).$$

Xét hàm số $f(d)=(9+d)\left(21-d^2\right)$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(d)=21-d^2-2d(9+d)=21-18d-3d^2$; $f'(d)=0 \Leftrightarrow d=1$ (do $d>0$).

Từ đó, $V \le f(1)$.

Suy ra thể tích khối hộp chữ nhật đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $d=d\left(I;(Q)\right)=1$ và $(Q)//(P)$.

Ta có $(Q): 2x-y+2z+d=0$.

$$d(I;(Q))=1 \Leftrightarrow \frac{|11+d|}{3}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=-8 \\ d=-14 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (Q_1): 2x-y+2z-8=0 \\ (Q_2): 2x-y+2z-14=0 \end{array}\right..$$

Lấy điểm $N(0;0;-8)\in(P)$. Ta có I và N phải nằm cùng phía với mặt phẳng (Q).

Do đó, ta chọn $(Q): 2x-y+2z-14=0$ nên suy ra $b+c+d=-13$.